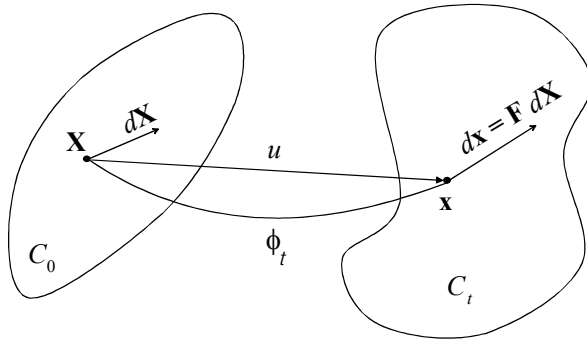


Résumé de cours : cinématique du milieu déformable

- **Transformation du milieu**



Soit une particule matérielle dont les coordonnées sont $\vec{X} = (X_1, X_2, X_3)$ à un instant t_0 pris comme instant de référence.

Ses coordonnées $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$ à un instant t ultérieur sont données au moyen d'une fonction vectorielle ϕ_t , appelée *transformation du milieu à l'instant t* :

$$\vec{x} = \phi_t(\vec{X})$$

- **Vecteur déplacement**

La différence des coordonnées (rapportées à un même repère) :

$$\vec{u}(X) = \vec{x} - \vec{X} = \phi_t(\vec{X}) - \vec{X}$$

définit le déplacement de la particule qui se trouvait en \vec{X} au temps de référence.

- **Gradient de la transformation**

Le tenseur d'ordre 2, $F(\vec{X}) = \nabla \phi_t(\vec{X})$, dérivée de la fonction ϕ_t au point \vec{X} , est appelé *gradient de la transformation en ce point*. Les coefficients de sa matrice dans une base cartésienne orthonormée sont :

$$F_{ij}(\vec{X}) = \frac{\partial x_i}{\partial X_j} \quad i, j = 1, 2, 3$$

- **Transport d'un vecteur**

Soit une direction matérielle représentée à l'instant de référence par le vecteur $d\vec{X} = (dX_1, dX_2, dX_3)$ issu du point \vec{X} . A l'instant t lui correspond un vecteur $d\vec{x}$ issu du point $\vec{x} = \phi_t(\vec{X})$ donné par

$$d\vec{x} = F(\vec{X}) \cdot d\vec{X}$$

$$(dx_i = \sum_{j=1}^3 F_{ij} dX_j)$$

- **Transport d'un volume**

Soit dV la mesure d'un élément de volume à l'instant de référence. Sa mesure à l'instant t est donnée par

$$dv = \det F dV$$

- **Transport d'une surface orientée**

Soit $dS \cdot \vec{N}$ un élément de surface à l'instant de référence (dS est la mesure de surface, \vec{N} est un vecteur unitaire normal à cette surface). A l'instant t lui correspond l'élément de surface $ds \cdot \vec{n}$ donné par

$$ds \vec{n} = dS \det F (F^T)^{-1} \cdot \vec{N}$$

- **Tenseur des dilatations**

Soient $d\vec{X}$ et $d\vec{Y}$ deux directions matérielles issues d'un même point \vec{X} , $d\vec{x}$ et $d\vec{y}$ leur correspondants à l'instant t . Le produit scalaire de ces deux vecteurs est donné par

$$d\vec{x} \cdot d\vec{y} = d\vec{X} \cdot C(\vec{X})d\vec{Y}$$

où $C = F^T F$ est le *tenseur des dilatations* (permet donc de calculer les variations de longueur et d'angle). Si $C = I$, la transformation est une isométrie.

- **Tenseur des déformations de Green-Lagrange**

Il existe plusieurs façons de mesurer la déformation du milieu. Si on la mesure par rapport à la configuration de référence, on peut utiliser le tenseur de *Green-Lagrange* donné par

$$E(\vec{X}) = \frac{1}{2} (C(\vec{X}) - I)$$

$$(E_{ij} = (C_{ij} - \delta_{ij}) / 2)$$

- **Déformations infinitésimales**

En différenciant l'expression $\vec{u}_t = \vec{x} - \vec{X}$ et sous l'hypothèse $\|\nabla u\| \ll 1$ on a

$$E(\vec{X}) \approx \varepsilon(\vec{X}) = \frac{1}{2} (\nabla u + \nabla u^T)$$

soit en détaillant

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} \right)$$

ε , partie symétrique du gradient du déplacement (∇u), est le *tenseur des déformations infinitésimales*. La partie antisymétrique de ∇u donne le *tenseur des rotations infinitésimales*.

- **Allongement dans une direction**

Soit au point \vec{X} un segment matériel de longueur dL et de direction unitaire \vec{N} ($d\vec{X} = dL \cdot \vec{N}$) et soit dl sa longueur après déformation. Les *allongements unitaire et quadratique* en ce point et dans la direction de ce segment se calculent par

$$\varepsilon_n = \frac{dl - dL}{dL} = \vec{n} \cdot \varepsilon \cdot \vec{n} \quad E_n = \frac{1}{2} \frac{dl^2 - dL^2}{dL^2} = \vec{n} \cdot E \cdot \vec{n}$$

Exercices

Exercice 1 : Allongement d'une tige

Soit une tige déformable AB de longueur initiale $L = 2\text{m}$. On repère l'ensemble de ses points matériels M par leur positions X à partir de l'extrémité A de la tige. Cette tige subit une déformation définie par la transformation

$$x = \phi(X)$$

x désignant la position du point M dont la position était X avant déformation. Calculer pour chacun des cas suivants :

$$1) \phi(X) = X - \frac{X}{100} \quad 2) \phi(X) = X + \frac{X^3}{1200} \quad 3) \phi(X) = X + \frac{2}{100\pi} \sin(\pi X/2)$$

- le déplacement $u(X)$ de chacun de ses points entre l'état initial et l'état final,
- la déformation $\varepsilon(X)$ en chacun de ses points.
- le facteur de dilatation $\lambda(X)$ en chaque point et la longueur dx de tout segment matériel de longueur initial dX ,
- la longueur finale, l , de la tige.

Exercice 2 : Extension simple

Soit dans un repère cartésien orthonormé la transformation homogène définie, à l'instant t par

$$\begin{cases} x_1 = X_1 + \alpha t X_1 \\ x_2 = X_2 \\ x_3 = X_3 \end{cases}$$

Déterminer le tenseur gradient F de la transformation. Étudier le transport d'un vecteur, d'un volume et d'un vecteur aire. Calculer le tenseur des dilatations et le tenseur de *Green-Lagrange*. Préciser l'hypothèse de la transformation infinitésimale et donner alors l'expression du tenseur des déformations linéarisées ε .

Exercice 3 : Double glissement

Soit dans un repère $(O, \bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$ la transformation donnée par

$$\begin{cases} x_1 = X_1 \\ x_2 = X_2 + aX_3 \\ x_3 = X_3 + aX_2 \end{cases}$$

où $a \in [0,1]$ est une constante. Calculer dans ce repère les composantes du tenseur des dilatations C et celles du tenseur des déformations de *Green-Lagrange* E .

Déterminer les allongements suivant les trois vecteurs de base et les directions propres de E .

Exercice 4 : Ellipsoïde des dilatations

On considère, à l'instant t , la transformation homogène qui laisse invariante l'origine O et qui est caractérisée par le tenseur gradient F .

Déterminer le domaine Ω_0 dont le transporté par le mouvement est, à l'instant t , une sphère de centre O et de rayon R .

Exercice 5 : Tenseur des petites déformations

Un solide déformable est soumis à des états de déformation de telle manière que

$$\begin{cases} x_1 = X_1 + X_1 X_3^2 \\ x_2 = X_2 + X_2 X_1^2 \\ x_3 = X_3 + X_3 X_2^2 \end{cases}$$

(X_1, X_2, X_3) et (x_1, x_2, x_3) représentant les composantes du vecteur position avant et après déformation dans un repère orthonormé. En faisant l'hypothèse des petites déformations :

- déterminer le vecteur déplacement u ;
- déterminer les tenseurs ε et ω de déformation et de rotation.

Exercice 6 : Glissement simple

On a représenté ci-dessous et de manière très exagérée, la transformation homogène d'un bloc initialement rectangulaire.

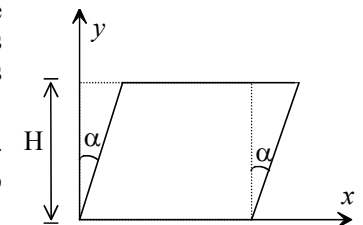
1) La déformation se faisant uniquement dans le plan xOy , déterminer, à partir des données indiquées sur la figure, le champ des déplacements.

2) En faisant l'hypothèse que l'angle de glissement α est très faible en déduire le champ des déformations infinitésimales ε .

3) Calculer l'allongement unitaire d'un segment matériel de direction quelconque $\vec{n} = (\cos\theta, \sin\theta)$. Si dl est sa longueur initiale, donner l'expression de sa longueur finale dl' . Quelles sont les directions des fibres matérielles qui ne subissent aucun allongement ? qui subissent l'allongement maximum ?

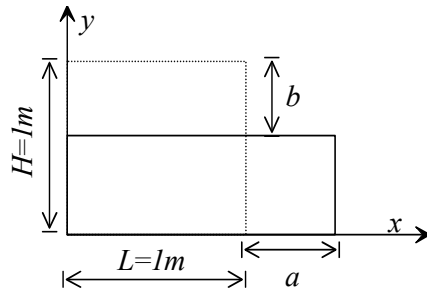
4) Déduire de 3) l'expression du glissement g pour toute direction \vec{n} . Quelles sont les directions pour lesquelles g est maximum ? minimum ? Retrouver ces résultats en calculant les valeurs principales et les directions principales de la déformation.

5) Quelle est la variation de volume ?



Exercice 7 : Déformation bi-axiale - Glissement pur

Mêmes questions mais dans le cas de la déformation bi-axiale re-présentée sur la figure ci-contre (on suppose bien entendu que a et b sont très faibles par rapport aux dimensions de l'échantillon, la transformation étant très exagérée sur la figure).



A quel type de déformation correspond le cas $a = b$? Faire un dessin. Quelle est la variation de volume ? Cela est-il évident sur le dessin ?

Exercice 8 : Géodésie

Les coordonnées de trois points de la région grenobloise ont été mesurées en 1952 par triangulation, puis en 1994 par géodésie *satellitaire* (GPS). Ces mesures sont reportées dans le tableau ci-dessous.

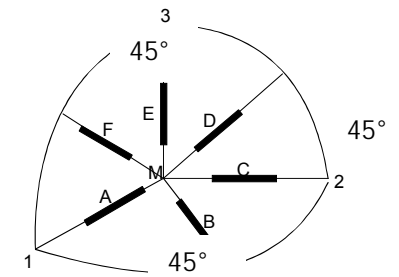
	Mesures 1952		Mesures 1994	
	(E-W) m	(N-S) m	(E-W) m	(N-S) m
Néron (Mf. Chartreuse)	864 868,00	331 513,00	864 868,00	331 513,00
Moucherotte (Mf. Vercors)	859 698,49	321 609,44	859 698,54	321 609,46
Revel (Mf. Belledonne)	877 799,94	328 020,60	877 799,89	328 020,47

En supposant que la déformation régionale est homogène, déterminer les déformations et directions principales du tenseur des déformations actuelles pour Grenoble ainsi que la rotation rigide.

Exercice 9 : Extensométrie

En vue de déterminer expérimentalement le tenseur des déformations au point M d'un massif, on place autour de ce point un dispositif expérimental (6 jauges *extensométriques*) permettant la mesure directe des allongements unitaires suivant les 6 directions considérées (voir figure ci-contre).

En appelant $\varepsilon_A, \varepsilon_B, \varepsilon_C, \varepsilon_D, \varepsilon_E, \varepsilon_F$, les 6 mesures effectuées, définir le tenseur des déformations au point M.



A.N. : $\varepsilon_A = 0.3\%$, $\varepsilon_B = 0.4\%$, $\varepsilon_C = -0.3\%$, $\varepsilon_D = -0.15\%$, $\varepsilon_E = 0\%$, $\varepsilon_F = 0.15\%$

Déterminer les allongements principaux et les directions principales.

En déduire la direction du glissement maximum.