Résumé de cours : Équilibre du milieu continu

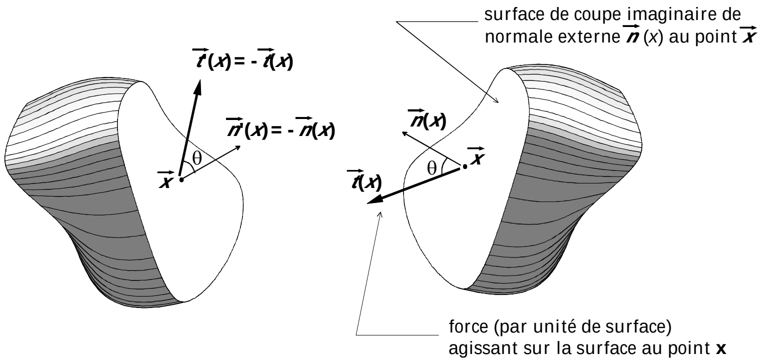
- **Vecteur contrainte**

Des forces intérieures (de cohésion et de frottement) prennent naissance en tout point d'un corps soumis à l'action de forces externes. Ce sont des forces surfaciques permettant aux différentes parties du corps de rester solidaires.

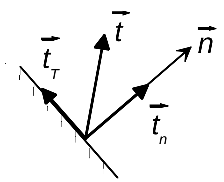
On définit en chaque point M d'un plan de normale unitaire $\vec{n}$ le *vecteur contrainte* par

$$\vec{t}(\vec{x}) = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\overrightarrow{\Delta F}_{\text{int}}}{\Delta S} \qquad \text{(unités : N.m}^{-2} \equiv \text{Pa)}$$

où $\vec{x} = \vec{OM}$ et $\overrightarrow{\Delta F}_{\text{int}}$ est la résultante des forces intérieures s'exerçant sur la surface ΔS.



- **Contrainte normale – contrainte tangentielle**



Vecteur *contrainte normale* : c'est le vecteur $\vec{t}_n$ projeté de $\vec{t}$ sur $\vec{n}$

Vecteur *contrainte tangentielle* : c'est le vecteur $\vec{t}_T$ projeté de $\vec{t}$ sur le plan.

Le vecteur contrainte est donc la somme de ces deux vecteurs orthogonaux

$$\vec{t} = \vec{t}_n + \vec{t}_T$$

La longueur algébrique du vecteur $\vec{t}_n$ est appelée contrainte normale et est notée σ_n

$$\sigma_n = \vec{t}.\vec{n}$$

L'intensité de la *contrainte tangentielle,* notée σ_T, est donnée par

$$\sigma_T = \|\vec{t}_T\| = \sqrt{\|\vec{t}\|^2 - \sigma_n^2}$$

<u>Convention de signe</u> : si $\vec{n}$ est sortante (resp. rentrante) à la partie considérée du milieu, une valeur positive (resp. négative) de σ_n indique une traction.

- **Tenseur des contraintes**

Le vecteur contrainte (encore appelé *tension*) est une application linéaire de la normale unitaire $\vec{n}$ (théorème de *Cauchy*) :

$$\vec{t}(\vec{x}) = \sigma(\vec{x}).\vec{n}(\vec{x})$$

où σ est le *tenseur des contraintes*. On montre (équilibre des moments) que ce tenseur est symétrique. Dans la base $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ orthonormée et en tout point M de position $\vec{x}$, la matrice du tenseur $\sigma(\vec{x})$ est donc de la forme

$$\sigma(\vec{x}) = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} & \sigma_{yz} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$$

On remarquera que les colonnes de cette matrice sont les vecteurs contraintes qui agissent en M sur les plans de normales $\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$ et $\vec{e}_z$

Ainsi, par exemple, σ_{xx} est la contrainte normale agissant sur un plan orthogonal à l'axe Ox ($\sigma_n = \sigma_{xx}$), σ_{xy} et σ_{xz} sont les composantes de la contrainte tangentielle ($\sigma_T = \sqrt{\sigma_{xy}^2 + \sigma_{xz}^2}$).

- **Plans principaux – Contraintes principales**

Un plan passant par *M* et sur lequel la contrainte tangentielle est nulle est dit *plan principal* au point *M*. Les efforts se réduisent donc à la seule contrainte normale ($\vec{t} = \sigma_n \vec{n}$). Cette contrainte normale est dite *contrainte principale*.
La normale $\vec{n}$ à ce plan est donc un vecteur propre du tenseur σ et σ_n est la valeur propre associée (on a bien en effet : $\sigma \cdot \vec{n} = \sigma_n \vec{n}$).

Ce tenseur étant symétrique, on sait qu'il existe trois de ces plans et qui de plus sont orthogonaux entre eux. Les normales unitaires aux trois plans principaux forment une base orthonormée, dite *base principale*, dans laquelle la matrice des contraintes est :

$$\sigma(\vec{x}) = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix}$$

σ_1, σ_2, et σ_3 désignant les contraintes principales.

- **Pression moyenne**

Le scalaire

$$p_{moy} = \frac{1}{3} tr(\sigma) = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}}{3} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}$$

est appelé *pression moyenne*.

Si $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = p_{moy}$, l'état de contrainte est réduit à l'état *hydrostatique* de tenseur $\sigma = p_{moy}\, I$. Tout plan est alors principal.
Cet état de contrainte est, par exemple, celui de tout fluide au repos. C'est aussi celui d'un fluide en mouvement mais à condition qu'il soit non visqueux (la viscosité donnant naissance à des efforts de frottement donc à des contraintes tangentielles).

- **Déviateur des contraintes**

Le tenseur

$$dev\sigma = \sigma - p_{moy} I$$

est appelé *déviateur des contraintes* (l'état des contraintes « dévie » de l'état purement hydrostatique $p_{moy} I$)

Un état de contrainte hydrostatique correspond donc à un déviateur nul.

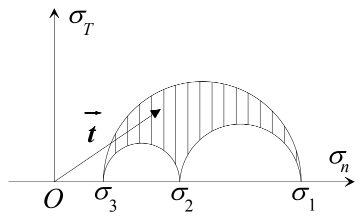
L'intensité du déviateur peut être mesurée par le scalaire

$$\tau = \sigma_1 - \sigma_3$$

appelé contrainte différentielle ou parfois improprement « déviateur » (sous entendu « norme du déviateur ») où σ_1 et σ_3 sont, respectivement, la plus grande et la plus petite contrainte principale.

- **Diagramme de *Mohr***

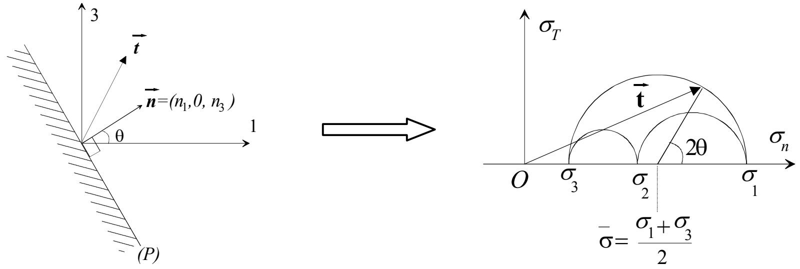
C'est une représentation graphique de la distribution des contraintes autour d'un point. Soit *M* ce point et soit $\vec{n}$ la normale à un plan quelconque passant par *M*.
Les efforts agissant sur ce plan en ce point sont représentés par la contrainte normale σ_n et le module de la contrainte tangentielle σ_T.
Dans un système d'axes cartésiens, si l'on porte σ_n en abscisse et σ_T en ordonnée et si l'on donne à $\vec{n}$ toutes les directions possibles, le point (σ_n ; σ_T) décrit dans ce diagramme la figure hachurée ci-dessous comprise entre les trois cercles passant par les points (σ_1 ; 0), (σ_2 ; 0) et (σ_3 ; 0).



(on supposera toujours que les contraintes principales sont ordonnées selon : $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$)

Note : si $\vec{n}$ est dans un des plans principaux, alors le point représentatif (σ_n ; σ_T) de l'état de contrainte sur ce plan est sur l'un des 3 cercles.

Par exemple :



et on a alors (cas de l'exemple ci-dessus)

$$\sigma_n = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}\cos 2\theta \qquad \sigma_T = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}\sin 2\theta$$

Exercices

Exercice 1 : *Détermination d'un tenseur des contraintes*

Construire la matrice du tenseur des contraintes en un point *M*, dans le repère orthonormé *Oxyz*, sachant que l'on a fait expérimentalement les constatations suivantes :

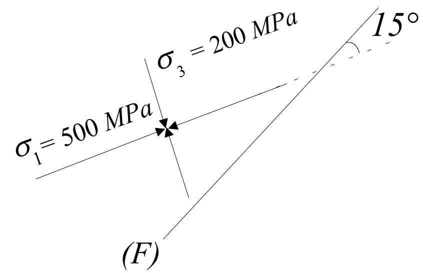
a) le plan *Mxy* est tangent en *M* à une surface libre du milieu, c'est à dire qu'aucune tension ne s'exerce sur la facette *Mxy* ;

b) la tension qui s'exerce sur la facette *Mxz* n'a pas de composante normale et seule la composante tangentielle est différente de zéro ;

c) comme sur la facette *Mxz*, la tension qui s'exerce sur la facette *Myz* est tangentielle.

Exercice 2 : ***Contrainte normale et contrainte tangentielle***

Soit l'état de contrainte homogène représenté ci-contre et *(F)* un plan de faille dans le milieu.



Calculer le vecteur contrainte s'exerçant sur la faille *(F)*.
Que valent la contrainte normale et la contrainte tangentielle sur *(F)* ?

Exercice 3 : ***Pression moyenne - contraintes déviatoriques***

Soit en un point *M* d'un milieu continu l'état de contrainte (en MPa), caractérisé dans le repère cartésien *Oxyz,* par la matrice :

$$\sigma = \begin{bmatrix} 15 & -5 & 0 \\ -5 & 15 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Calculer :

- la pression moyenne,
- la matrice du *déviateur* des contraintes,
- le vecteur contrainte qui s'exerce sur le plan passant par *M* et de normal $\vec{n} = (1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$,
- les contraintes principales et les normales aux plans principaux.

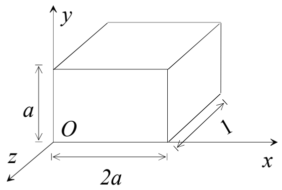
Représenter, dans le plan *xOy*, la croix des contraintes au point *M*.

Exercice 4 : ***Essai triaxial***

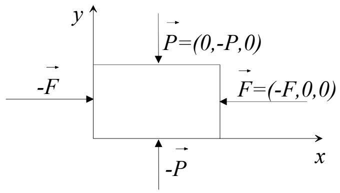
Une éprouvette cylindrique est placé dans une presse. Elle est soumise à une pression de confinement *p* et à une compression uniaxiale suivant sa génératrice. Donnez l'expression du tenseur des contraintes dans une base de votre choix.

Exercice 5 : ***Sollicitations composées***

On considère un bloc de roche de longueur unité et de base rectangulaire.
Soit *Oxyz* le système d'axes cartésien tel que la base du bloc soit dans le plan *Oxy*. On note alors 2*a* et *a* les dimensions de cette base suivant les axes *Ox* et *Oy*, respectivement.



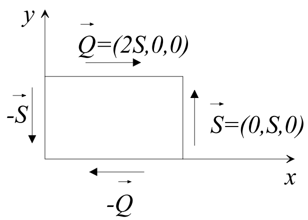
a) On soumet ce bloc à des forces uniformément réparties sur les faces *xz* et *yz* et agissant perpendiculairement à celles-ci. Les faces *xy* sont libres de tout effort. On a représenté ci-contre les résultantes par face de chacune de ces forces.



En notant F et P le module des forces $\vec{F}$ et $\vec{P}$, donner dans le repère *xyz* la matrice du tenseur des contraintes auquel est soumis le bloc. On notera σ^{I} cette matrice.

A.N. : a = 5 cm, F = 500 kN, P = 300 kN. Exprimer les contraintes en MPa.

b) On superpose aux sollicitations précédentes, et toujours sur les mêmes faces, les efforts représentés ci-contre.



En notant S le module de la force $\vec{S}$ donner dans le repère *xyz* la matrice représentative de l'état de contraintes supplémentaires. On notera σ^{II} cette matrice.

A.N. : S = 200 kN. Exprimer les contraintes en MPa.

c) Calculer alors la matrice σ des contraintes totales.

Exercice 6 : ***Diagramme de Mohr (I)***

Tracer le diagramme de *Mohr* pour un état de contrainte caractérisé par des contraintes *déviatoriques* principales de

$$s_1 = 3\,\text{kbar} \qquad s_2 = 0 \qquad s_3 = -3\,\text{kbar}$$

et par une pression moyenne de 4 kbar

Exercice 7 : ***Diagramme de Mohr (II)***

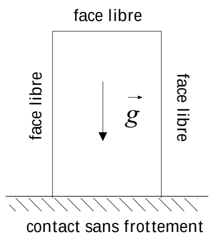
Utiliser un diagramme de *Mohr* pour déterminer les valeurs de σ_I et σ_2 connaissant la contrainte normale σ_n et la contrainte tangentielle σ_T sur deux plans *(P)* et *(Q)* orthogonaux.

A.N. :

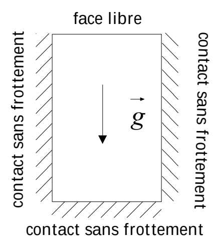
Plan	σ_n	σ_T
(P)	+2.2 kbar	+1.1 kbar
(Q)	+1.2 kbar	-1.1 kbar

Exercice 8 : *lignes de contrainte*

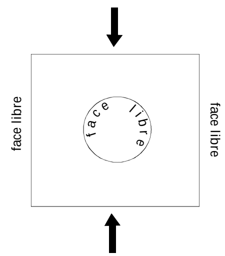
On considère les trois expériences illustrées ci-dessous. Tracer de façon approximative et en quelques points des plans de coupe représentés sur ces figures ce que doivent être les croix des contraintes.



Corps soumis à son seul poids et posé sans frottement sur un plan rigide.



Corps encastré sans frottement dans une boite rigide et soumis à son seul poids.



Plaque trouée soumise à une compression uniaxiale.